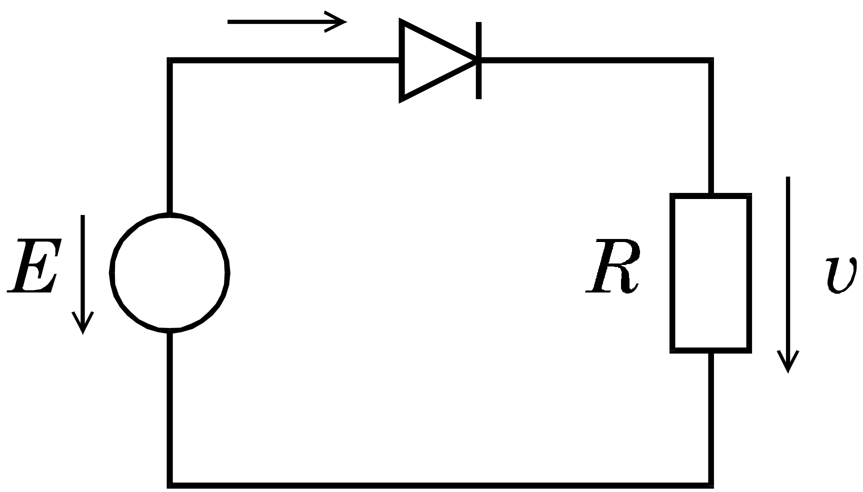
Řešení soustavy nelineárních algebro-diferenciálních rovnic

1. Řešení algebraických nelineárních rovnic

$$I_S\left(e^{\frac{E-v}{v_T}}-1\right)$$



parametry obvodu:

$$I_S = 10^{-15}\ \mathrm{A},\ v_T = 25\ \mathrm{mV},\ E = 2\ \mathrm{V}\ \text{a}\ R = 1\ \mathrm{k\Omega}$$

parametry obvodu:

$$I_S = 10^{-15}\ \mathrm{A},\ v_T = 25\ \mathrm{mV},\ E = 2\ \mathrm{V}\ \text{a}\ R = 1\ \mathrm{k\Omega}$$

obvod lze popsat jednoduchou nelineární rovnicí:

$$I_S\left(e^{\frac{E-v}{v_T}} - 1\right) - \frac{v}{R} = 0$$

$$f(v) = 0$$

parametry obvodu:

$$I_S = 10^{-15}\ \text{A},\ v_T = 25\ \text{mV},\ E = 2\ \text{V a } R = 1\ \text{k}\Omega$$

obvod lze popsat jednoduchou nelineární rovnicí:

$$I_S\left(e^{\frac{E-v}{v_T}} - 1\right) - \frac{v}{R} = 0$$

$$f(v) = 0$$

obvod řešíme klasickou Newtonovou metodou

$$f'^{(j)}\Delta v^{(j)} = -f^{(j)}$$

$$v^{(j+1)} = v^{(j)} + \Delta v^{(j)}$$

v našem případě:

$$f^{(j)} = I_S\left[e^{\frac{E-v^{(j)}}{v_T}} - 1\right] - \frac{v^{(j)}}{R},$$

$$f'^{(j)} = -\frac{I_S}{v_T} e^{\frac{E-v^{(j)}}{v_T}} - \frac{1}{R}$$

v našem případě:

$$f^{(j)} = I_S \left[e^{\frac{E - v^{(j)}}{v_T}} - 1 \right] - \frac{v^{(j)}}{R},$$

$$f'^{(j)} = -\frac{I_S}{v_T} e^{\frac{E - v^{(j)}}{v_T}} - \frac{1}{R}$$

Napětí na otevřené diodě odhadněme 0,65 V a zkusme tedy provést iterativní proces se startovní hodnotou 1,35 V. V deváté iteraci je již hodnota opravy velmi malá; řešení po devíti iteracích je 1,303 V.

Zkusme však nyní odstartovat iterační proces hodnotou 1,5 V. Řešení konverguje rovněž k 1,303 V tentokrát až po 56 iteracích. Mnohem závažnější je, že výsledek první iterace 0,029 V vyžaduje v druhé iteraci vyčíslení výrazu

$$e^{\frac{E - v^{(1)}}{v_T}}$$

který nabude hodnoty $1{,}735 \times 10^{34}$!

Zkusme však nyní odstartovat iterační proces hodnotou 1,5 V. Řešení konverguje rovněž k 1,303 V tentokrát až po 56 iteracích. Mnohem závažnější je, že výsledek první iterace 0,029 V vyžaduje v druhé iteraci vyčíslení výrazu

$$e^{\frac{E-v^{(1)}}{v_T}}$$

který nabude hodnoty $1{,}735\times10^{34}$! Vynikajícím řešením problému je logaritmické tlumení divergence:

$$v^{(j+1)} = v^{(j)} + \operatorname{sign}\left(\Delta v^{(j)}\right)\ln\left(1+\left|\Delta v^{(j)}\right|\right)$$

místo

$$v^{(j+1)} = v^{(j)} + \Delta v^{(j)}$$

Logaritmické tlumení divergence je založeno na rozvoji

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Logaritmické tlumení divergence je založeno na rozvoji

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Vraťme se nyní k našemu příkladu a tentokrát provádějme iterační proces s logaritmickým tlumením divergence. Výsledek první iterace je zde 0,5954 V a výraz

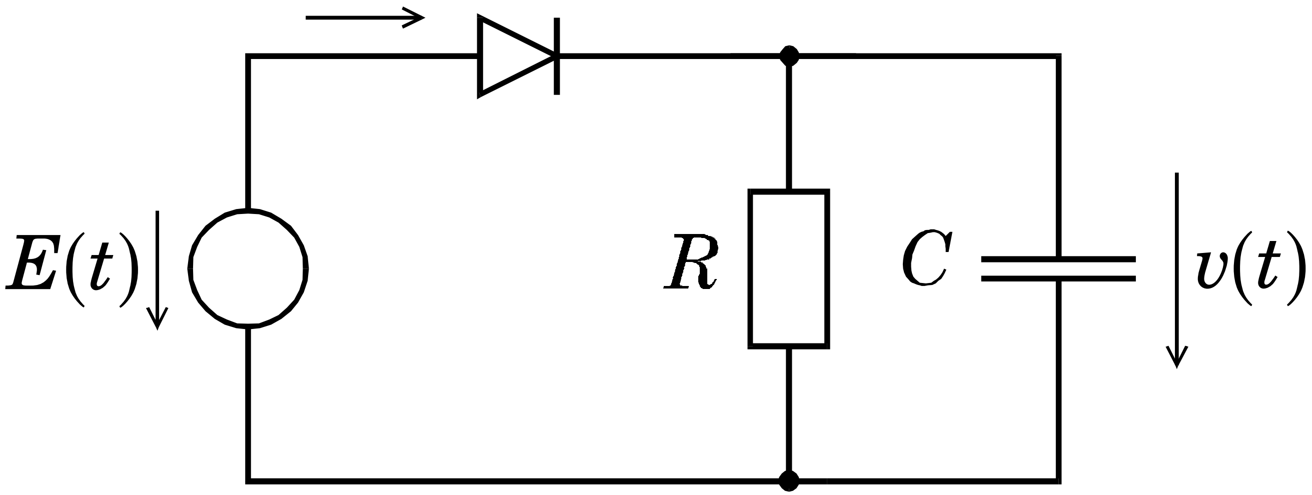
$$e^{\frac{E - v^{(1)}}{v_T}}$$

nabývá tentokrát hodnoty jen $2{,}515 \times 10^{24}$, k řešení úlohy je nyní třeba pouze 34 iterací.

2. Řešení algebro-diferenciálních nelineárních rovnic

k původnímu obvodu se přidá kapacitor a budící zdroj se stane časově proměnným:

$$I_S\left[e^{\frac{E(t)-v(t)}{v_T}}-1\right]$$



implicitní algebro-diferenciální rovnice obvodu:

$$I_S\left[e^{\frac{E(t)-v(t)}{v_T}}-1\right]-\frac{v(t)}{R}-C\dot{v}(t)=0$$

$$f\big(v(t),\dot{v}(t),t\big)=0$$

implicitní algebro-diferenciální rovnice obvodu:

$$I_S\left[e^{\frac{E(t)-v(t)}{v_T}}-1\right]-\frac{v(t)}{R}-C\dot{v}(t)=0$$

$$f\big(v(t),\dot{v}(t),t\big)=0$$

předpokládejme, že již známe řešení n-tého časového kroku procesu numerické integrace. Předpověď hodnoty napětí v následujícím časovém kroku (n+1) je určena prediktorem – explicitní Eulerovou metodou:

$$v_{n+1}^{(0)}=v_n+\dot{v}_n\left(t_{n+1}-t_n\right)$$

$$\dot{v}_{n+1}^{(0)}=\dot{v}_n$$

oprava hodnoty napětí v tomto kroku je určena korektorem (oprávcem) - iteracemi Newtonovy metody:

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{n+1}^{(j)} + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{v}}\right)_{n+1}^{(j)} \left(\frac{\mathrm{d}\dot{v}}{\mathrm{d}v}\right)_{n+1}\right] \Delta v_{n+1}^{(j)} = -f_{n+1}^{(j)}$$

oprava hodnoty napětí v tomto kroku je určena korektorem (oprávcem) - iteracemi Newtonovy metody:

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{n+1}^{(j)}+\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{v}}\right)_{n+1}^{(j)}\left(\frac{\mathrm{d}\dot{v}}{\mathrm{d}v}\right)_{n+1}\right]\Delta v_{n+1}^{(j)}=-f_{n+1}^{(j)}$$

tentokrát s použitím implicitní Eulerovy metody:

$$v_{n+1}^{(j)}=v_n+\dot{v}_{n+1}^{(j)}(t_{n+1}-t_n)$$

čili

$$\left(\frac{d\dot{v}}{dv}\right)_{n+1}=\frac{1}{t_{n+1}-t_n}$$

pro náš konkrétní obvod tedy dostaneme rovnice:

$$f_{n+1}^{(j)} = I_S \left[e^{\frac{E_{n+1} - v_{n+1}^{(j)}}{v_T}} - 1 \right] - \frac{v_{n+1}^{(j)}}{R} - C\dot{v}_{n+1}^{(j)},$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_{n+1}^{(j)} = -\frac{I_S}{v_T} e^{\frac{E_{n+1} - v_{n+1}^{(j)}}{v_T}} - \frac{1}{R},$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{v}} \right)_{n+1}^{(j)} = -C.$$

po určení opravy $\Delta v_{n+1}^{(j)}$ se stanoví nejen následující hodnota napětí, nýbrž i následující hodnota derivace napětí podle času:

$$v_{n+1}^{(j+1)} = v_{n+1}^{(j)} + \Delta v_{n+1}^{(j)},$$

$$\dot{v}_{n+1}^{(j+1)} = \dot{v}_{n+1}^{(j)} + \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \Delta v_{n+1}^{(j)}.$$

po určení opravy $\Delta v_{n+1}^{(j)}$ se stanoví nejen následující hodnota napětí, nýbrž i následující hodnota derivace napětí podle času:

$$v_{n+1}^{(j+1)} = v_{n+1}^{(j)} + \Delta v_{n+1}^{(j)},$$

$$\dot{v}_{n+1}^{(j+1)} = \dot{v}_{n+1}^{(j)} + \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \Delta v_{n+1}^{(j)}.$$

Numerická integrace programem MathViews

```
IS=1e-15; vT=25e-3; R=1000; C=1e-6
v=0; vdot=0
```

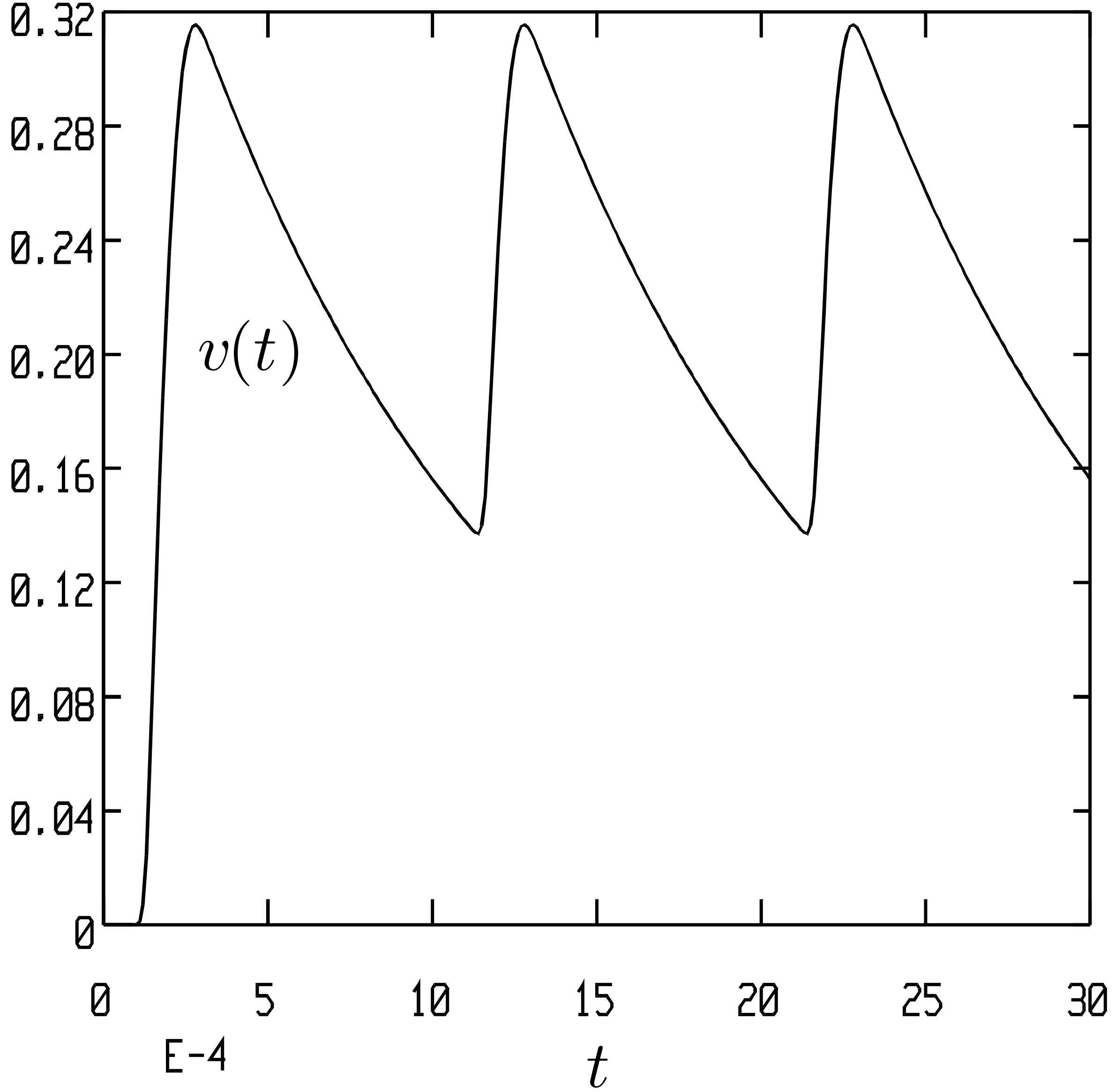
počáteční podmínka

```
j=0; t(j+1)=0; x(j+1)=v
j=1; while j<=300
     E=sin(j/100*2*3.1415926535)
     i=1; while i<=100
     f=IS*(exp((E-v)/vT)-1)-v/R-C*vdot
     dfdv=-IS/vT*exp((E-v)/vT)-1/R
     dfdvdot=-C
     dv=-f/(dfdv+dfdvdot/1e-5)
     v+=dv
     vdot+=dv/1e-5
```

časový krok

```
        if abs(dv)<1e-6
            i=101
        else
            i+=1
        end
    end
    t(j+1)=j*1e-5; x(j+1)=v
    v+=vdot*1e-5
    j+=1
end
plot(t,x)
```

prediktor



0.32
0.28
0.24
0.20
0.16
0.12
0.08
0.04
0
v(t)
0
5
10
15
20
25
30
E-4
t